

Exercice 1 :

ABC est un triangle équilatéral direct et M est un point intérieur à ce triangle. L; K et H sont respectivement les projetés orthogonaux de M sur (AB); (BC) et (CA). Soit r la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et M' = r (M)

- 1) Montrer que BMM' est un triangle équilatéral.
- 2) Soit L' le projeté orthogonal de M' sur (AB).
 - a) Déterminer en justifiant les images des droites (BC) et (KM) par r.
 - b) Montrer alors que r (K) = L' puis en déduire que M'L' = MK
- 3) Soit Δ la parallèle à (AB) menée par M'. Δ coupe (ML) en N.
 - a) Montrer que MN = ML + MK
 - b) Soit N' l'image de N par la rotation directe de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Montrer que r'(Δ) = (BN').
 - c) Montrer que N' ; M et H sont alignés.
- 4) En déduire que ML + MK + MH = HN'

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B. O le milieu de [AC] et r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Construire D = r (B) et montrer que ABCD est un carré.
- 2) Déterminer r ((AB)) et montrer r ((BC)) = (CD).
- 3) Construire E = r(C) et montrer que D est le milieu de [CE].
- 4) Soit ζ le cercle circonscrit au carré ABCD.
 - a) Déterminer le centre I du cercle ζ ' image de ζ par r.
 - b) Déterminer $\zeta \cap \zeta'$ (expliquer).
- 5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et G' le barycentre des points pondérés (D ; 1) et (I ; 2).
 - a) Montrer que r (G) = G'.
 - b) La droite (AG) recoupe ζ en H et la droite (AG') recoupe ζ' en H' Montrer que le triangle AHH' est rectangle et isocèle.

Exercice 3 :

ABCD est un carré direct. Soit M un point de [AD], M distinct de D.
La droite (CM) coupe (AB) en Q. La perpendiculaire à (CM) en C coupe respectivement (AB) en P et (AD) en N.
Soit r le quart de tour direct de centre C.

- 1) Trouver l'image de la droite (AD) par r.
- 2) a) Montrer que r (M) = P puis déterminer r (N)
b) Préciser la nature des triangles CMP et CNQ
c) Montrer que les droites (MP) et (NQ) sont perpendiculaires.

Exercice 4 :

On donne un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle ζ de centre O. Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- 1) a) Déterminer r (A) et r (B)
b) Déterminer l'image de (OA) et l'image de ζ par r.
- 2) Les droites (OA) et (OB) recoupent ζ respectivement en H et H'. Montrer que le triangle OHH' est équilatéral.
- 3) Soit M un point de $\zeta \setminus \{A\}$ et N le point tel que AMN est un triangle équilatéral direct. Quel est l'ensemble des points N lorsque M décrit $\zeta \setminus \{A\}$.

Exercice 5 :

ABC est un triangle direct. On note I le milieu de [BC].
On construit à l'extérieure de ce triangle les points B' et C' tel que ACC' et BAB' soient deux triangles rectangle et isocèles en A. On pose O' = C * C' et O' = B * B'.

- 1) a) Montrer que CC' = BB' et que (CC') \perp (BB')
b) En déduire que le triangle IOO' est rectangle et isocèle.
- 2) Soient : H = S_A(B) et K = S_A(C). Les droites (CB') et (HC') se coupent en F et les droites (BC') et (KB') se coupent en F'.
 - a) Montrer que C'est l'image de H par le quart de tour direct de centre A.
 - b) Montrer que le triangle AFF' est rectangle et isocèle en A.

Exercice 6 :

ABCD est un carré direct de centre O. Soit M \in [AB] et N \in [BC] tel que BM = CN.

- 1) En utilisant le quart de tour direct de centre I montrer que IM = IN.
- 2) Déterminer la position du point M sur le segment [AB] pour que la distance MN soit minimale et calculer sa valeur.
- 3) La droite (IM) coupe (DC) en P.
 - a) Montrer que les triangles IB ? et IAM sont isométriques.
 - b) En déduire que l'aire du quadrilatère IMBN est le quart de celle du carré.
- 4) Soit J le point tel que ABJ est un triangle équilatéral direct. K est l'image de B par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Montrer que A, C et K sont alignés.

Exercice 7 :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et I le milieu de [BC]. On suppose que ABC est orienté dans le sens direct.

La droite (Δ) passant par C et perpendiculaire à (BC) coupe (AB) en D. Soit R la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Faire une figure.
- 2) a) Déterminer R(B)
b) Déterminer les images des droites (AC) et (BC) par R.
c) En déduire R(C)
- 3) Déterminer et construire J = R(I)
- 4) Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer et construire (ζ') = R(ζ)
- 5) La bissectrice de l'angle \widehat{AIB} recoupe (ζ) en M. La perpendiculaire en A à (AM) recoupe (ζ') en N.
Montrer que AMN est un triangle rectangle et isocèle en A.

Exercice 8 :

Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ et ζ le cercle circonscrit à ce triangle. La médiatrice Δ de [AC] coupe

l'arc [BC] de ζ ne contenant pas A en un point I. On désigne par O le milieu de [BC] et par R la rotation indirecte de centre I et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- 1) Montrer que R(A) = C
- 2) a) Construire le point C' image de C par R.
b) Montrer que (CC') est perpendiculaire à (BC)
c) En déduire que (BC) est l'image de (AB) par R.
- 3) a) Placer le point B' image de B par R.
b) Montrer que les points I, C, C' et B' sont situés sur un même cercle ζ' que l'on précisera.

Exercice 9 :

Soit ABI un triangle équilatéral direct Ω le symétrique de B par rapport à (AI) r la rotation directe de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1) Montrer que r(A) = I et conclure le point C = r(B)
- 2) Montrer que I est le milieu de [AC]
- 3) A tout point M \in [AB] distinct de A et B on associe le point M' \in [IC] tel que AM = IM'
Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral.

Exercice 10 :

Soit ABCD un carré de centre O orienté dans le sens direct. Soient I, J et K les milieux respectifs de [AD], [CD] et [AB]. R étant la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) a) Déterminer r(A) et r(D). En déduire r(I)
b) Montrer que (IB) et (CK) sont perpendiculaires.
- 2) La droite (IB) coupe respectivement (AJ) et (CK) en E et E'. Montrer que le triangle OEE' est rectangle et isocèle en O.
- 3) Soit M un point du segment [AD]. La perpendiculaire à (MC) passant par D coupe (AB) en M'.
 - a) Déterminer l'image de (MC) par r.
 - b) En déduire que r(M) = M' et que DM = AM'.
 - c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit [AD]
- 4) Les cercles de centres respectifs A et D et passant par O se coupent en H. Montrer que le quadrilatère OAHD est un carré.

Exercice 11 :

Soit $xOy = \frac{\pi}{4}$; A un point de [Ox) et B un point de [Oy) tel que OA = OB.

- 1) Soit A' le projeté orthogonal de A sur [Oy) et B' le projeté orthogonal de B sur [Ox)
 - a) Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Montrer que r([AB']) = [BA']
 - b) Déterminer l'image de (OA) par r.
 - c) Soit (ζ) le cercle de centre O et passant par A et B, déterminer r(ζ).
- 2) Les deux droites (AA') et (BB') sont sécantes en I. Soit la rotation r' de centre I tel que r'(A) = B
 - a) Déterminer en radian l'angle de la rotation r'
 - b) Montrer que r'(A') = B'.

Exercice 12 :

Soit ABCD un parallélogramme direct.

On trace à l'extérieure de ABCD les triangles : OAD rectangle et isocèle en O et DCE rectangle et isocèle en D.

On considère r le quart de tour direct de centre O.

- 1) Donner l'image de A par r.
- 2) Déterminer en justifiant l'image de la droite (AB) par r
- 3) Montrer alors que r(B) = E puis en déduire la nature du triangle OBE.
- 4) a) Construire le point F image de D par r.
b) En déduire que les trois points A, O et F sont alignés
c) Montrer que (EF) \perp (BD) et que BD = EF.

Exercice 12 :

On considère un triangle ABC.

On considère la rotation indirecte r de centre A et d'angle 90° . Cette rotation transforme B et C en des points D et E.

On note F le symétrique de D par rapport à A et I le milieu de [BC].

- Quelle est l'image de I par r ?
- Démontrer que les droites (EF) et (AI) sont perpendiculaires et que l'on a $EF = 2AI$.

Exercice

Soit ABC un triangle (quelconque) direct et H son orthocentre.

On considère r le quart de tour direct de centre A et S_A la symétrie centrale de centre A ; r' le quart de tour indirecte de centre A.

- Construire les points $r(B) = B'$; $r'(C) = C'$ et $C'' = S_A(C')$
- Montrer que $r(C) = C''$
- Montrer que les droites (BC) et $(B'C'')$ sont perpendiculaires.
- Montrer que (AH) est la droite portant la médiane du triangle $AC'B'$ issue de A.

Exercice

ζ et ζ' sont deux cercles de même rayon sécants en A et B tel que le centre O de ζ appartient à ζ' .

- Donner la nature du triangle AOO'.
 - Donner la nature du quadrilatère AOBO'.
- Soit r la rotation de centre A qui transforme ζ en ζ'
 - Préciser en radian l'angle α de la rotation r .
 - La droite (OO') recoupe ζ en E et ζ' en F. Montrer que $r(B) = F$ et $r(E) = B$.
- Une droite Δ passant par B et distincte de (AB) recoupe ζ en M et ζ' en M'.
 - Donner la nature du triangle AMM'
 - Soit D la tangente à ζ en M et D' la tangente à ζ' en M', montrer que $r(D) = D'$.

Exercice

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et O le milieu de [BC]

On suppose que ABC est orienté dans le sens direct.

- Construire le point B' image de B par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens direct.
- Montrer que B' est l'image de O par une homothétie h de centre A dont on précisera son rapport k .
 - Construire alors le point C' image de C par l'homothétie de centre A et de rapport k .
 - Donner la nature du triangle $AB'C'$
- Soit O' le projeté orthogonal de B' sur (AC) montrer que $r(O) = O'$.
 - Préciser alors l'image de la droite (BC) par r .

Exercice

On donne un triangle quelconque ABC.

On construit à l'extérieure de ce triangle les carrés ABDE et ACFG.

En utilisant une rotation convenable montrer que :

- $EC = BG$
- (EC) est perpendiculaire à (BG)

Exercice

On donne deux droites (D) et (D') strictement parallèles et A un point n'appartenant ni à (D) ni à (D').

- Construire un triangle équilatéral ABC tel que $B \in (D)$ et $C \in (D')$
- Construire un triangle rectangle isocèle AEF de sommet principale A tel que $E \in (D)$ et $F \in (D')$

Exercice

Soit un carré ABCD de centre O. E est un point de [AB], F est un point de [BC], G est un point de [CD] et H est un point de [DA] tels que $AE = BF = CG = DH$.

En utilisant une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que EFGH est un carré.

